ÜBUNGSAUFGABEN ZUR VORBEREITUNG VON KLAUSUR III am 21.02.14

I. Exponentialfunktion und Logarithmus

① Bilde die 1. Ableitung: Achtung! Manchmal Produkt- und Kettenregel verwenden!

a) $f(x) = e^{2x-1}$
b) $f(x) = (-3x+1)\cdot e^{-x}$
c) $f(x) = e^{7x}$
d) $f(x) = \ln x$
e) $f(x) = \ln(5x+3)$
f) $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$
g) $f(x) = x\cdot \ln x$
h) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$
i) $f(x) = e^x + 5e^{-x}$

② Bestimme die Lösung der folgenden Gleichungen:

↓ ohne Taschenrechner ↓

a) $2^x = 8$
b) $3^{x+4} = 9$
c) $5^{\frac{1}{2}x+7} = 1$
d) $7^x = \frac{1}{7}$

↓ Umformen mithilfe ln, dann mit GTR auf 3 Nachkommastellen gerundet ↓

e) $e^x = 7$
f) $3^x = 10$
g) $0{,}5^x = \frac{1}{17}$
h) $e^x = \frac{1}{100}$
i) $e^x = 0{,}2$
j) $\left(\frac{1}{7}\right)^x = 2{,}5$

③ Löse die Exponentialgleichungen (umformen mit Äquiv.relationen, dann mit ln):

a) $e^{x+5} = 11$
b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+4} = 3$
c) $100^{-0{,}1x+0{,}5} = 30$
d) $2e^{-x}+2 = 3$
e) $e^{2x} - 3e^x = 0$ — Tipp: klammere e^x aus
f) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ — Tipp: Substituiere

④ Exponentialfunktionen und -gleichungen im Sachzusammenhang

4.1 Die Umsätze eines Unternehmens sind vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2012 exponentiell gestiegen. Der Umsatz t Jahre seit Beobachtungsbeginn ($t = 0$ entspricht dem Jahr 2000, $f(t)$ in Euro) lässt sich näherungsweise mit $f(t) = 50\,000\cdot e^{0{,}2t}$ berechnen.

a) Berechnen Sie den Umsatz im Jahr 2000 und 2012.

b) Berechnen Sie, wann das Unternehmen 1 Million Euro Umsatz macht, wenn man davon ausgeht, dass die Funktion f den Umsatz auch über das Jahr 2012 hinaus näherungsweise beschreibt.

c) Berechnen Sie $f'(2)$ und erläutern Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

4.2 Die Funktion f mit $f(x) = 25\,000\cdot e^{0{,}05x}$ gibt näherungsweise die Anzahl der Einwohner einer Kleinstadt für den Zeitraum vom Jahr 2000 bis zum Jahr 2012 an (x in Jahren; $x = 0$ entspricht dem Jahr 2000).

a) Berechnen Sie die Einwohnerzahl im Jahr 2000 und 2012.

b) Bestimmen Sie $f'(x)$, berechnen Sie $f'(0)$ sowie $f'(12)$ und erklären Sie die Bedeutung im Sachzusammenhang.

c) Berechnen Sie, wann der Ort 100 000 Einwohner hätte, wenn man davon ausgeht, dass die Einwohnerzahl sich auch über das Jahr 2012 hinaus mit der Funktion f berechnen lässt.

II. Funktionenscharen

⑤ Gegeben ist die Funktionenschar mit $f_t(x) = t^2e^x - t^2x$.
Untersuche die Graphen von f_t auf Extrempunkte und gib diese in Abhängigkeit von t an.

⑥ Geg. ist $f_t(x) = (x-t)\cdot x^2$.

a) Skizziere die Graphen für $t = -1;\ 0;\ 1$.
b) Berechne die Schnittpunkte der Graphen mit der x-Achse und denjenigen mit der y-Achse.
c) Hat jeder Graph Schnittpunkte mit der x- bzw y-Achse, wenn $t \in \mathbb{R}$?
d) Wie verändert sich die Lage der Schnittpunkte mit der x-Achse, wenn t größer wird?

III. Integral

⑦ Berechne folgende Integrale: [ohne GTR]

a) $\int_1^2 (x^3+2x^2+1)\,dx$ b) $\int_0^2 (2x+3)^2\,dx$

c) $\int_1^3 (x+\cos(x))\,dx$ d) $\int_3^4 \left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)dx$

⑧ Gib eine Stammfunktion an

a) $f(x) = e^{4x}$ c) $f(x) = \pi \cdot \sin(\pi x - 2\pi)$

b) $f(x) = 3e^{2x-2} + x^3$ d) $f(x) = \frac{1}{2}(3x-2)^5$

⑨ Berechne den Flächeninhalt

a) zwischen $f(x) = x$ und $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ [o. GTR]

b) zwischen $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}$ [GTR]

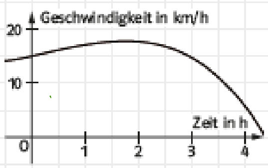
c) zwischen $f(x) = -x^3 + 4x$ und x-Achse in $[-2;2]$ [o. GTR]

⑩ Anwendungsaufgaben zur Integralrechnung

Wenn eine Funktion f die Änderungsrate angibt, so kann man mithilfe des Integrals die sogenannte Wirkung berechnen, d.h. das, was die Änderungsrate bewirkt.
Tipp: Wenn man die Einheiten der Achsen multipliziert, erhält man die passende Einheit des Integrals und kann damit die Bedeutung des Integrals im Anwendungskontext leicht erkennen.

1. Berechnen Sie jeweils die Integrale und erklären Sie die Bedeutung im Kontext.

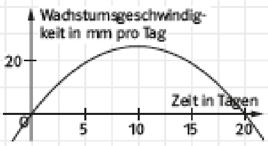
a) Die Funktion f mit $f(x) = -0{,}4x^3 + 0{,}5x^2 + 2x + 15$ gibt für $0 \le x \le 3$ näherungsweise die Geschwindigkeit eines Radfahrers in km/h nach x Stunden an.



$\int_0^3 f(x)\,dx =$

Bedeutung des berechneten Integrals im Kontext:

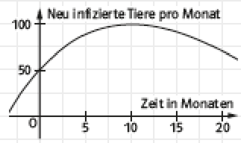
b) Die Funktion f mit $f(x) = -\frac{x^2}{4} + 5x$ gibt für $0 \le x \le 20$ näherungsweise die Wachstumsgeschwindigkeit in mm/Tag einer Pflanze nach x Tagen an.



$\int_0^{20} f(x)\,dx =$

Bedeutung des berechneten Integrals im Kontext:

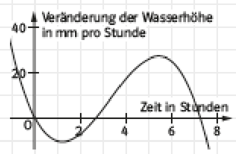
c) Für $0 \le x \le 12$ beschreibt die Funktion f mit $f(x) = 0{,}01x^3 - 0{,}7x^2 + 11x + 50$ näherungsweise die Anzahl der Neuinfektionen einer Tierkrankheit pro Monat, wobei $x = 0$ dem Januar 2011 entspricht.



$\int_0^{12} f(x)\,dx =$

Bedeutung des berechneten Integrals im Kontext:

d) Die Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 10x^2 - 20x$ gibt für $0 \le x \le 8$ näherungsweise an, wie sich die Wasserhöhe eines Stausees verändert (x in Stunden, f(x) in mm pro Stunde). Zum Zeitpunkt $x = 0$ beträgt die Wasserhöhe 5 m.



$\int_0^8 f(x)\,dx =$

Bedeutung des berechneten Integrals im Kontext:

⑪ Weitere Aufgaben aus dem Buch:

S. 128 ① ⑥ ⑨ ohne GTR

S. 129 ① ab ③ ④ mit GTR

Hinweis zur Arbeit mit dem GTR: * Bei Sachaufgaben kommt man meist gut zurecht, wenn man $\boxed{\text{WINDOW}}$ für die x-Achse passend wählt und dann $\boxed{\text{ZOOM}}$ 0: ZoomFit einstellt.

* Flächenberechnung mit 2nd $\boxed{\text{CALC}}$ 7: $\int f(x)\,dx$,
* Betragsfunktion anwählen mit $\boxed{\text{MATH}}$ ▷ $\boxed{\text{NUM}}$ 1: abs