

Aufgabe ① Ableitungen

a) $f'(x) = 2e^{2x-1}$

b) $f(x) = u \cdot v$

$u(x) = (-3x+1) \quad v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = -3 \quad v'(x) = -e^{-x}$

$f'(x) = -3e^{-x} + (-3x+1) \cdot (-e^{-x})$

$= -3e^{-x} + 3xe^{-x} - e^{-x}$

$= e^{-x}(-3+3x-1)$

$= -e^{-x}(4-3x)$

c) $f'(x) = 7e^{7x}$

d) $f'(x) = \frac{1}{x}$

e) $f'(x) = \frac{5}{5x+3} \cdot 5$

f) $f(x)$ umformen:

$f(x) = (3-2x)e^{-x}$

$f'(x) = (3-2x)(-e^{-x}) + (-2)e^{-x}$

$= -e^{-x}(3-2x+2)$

$= -e^{-x}(5-2x)$

g) $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$

$= \ln x + 1$

h) $f(x) = u(v(x))$

$u(x) = \ln x \quad v(x) = \sqrt{x}$

$u'(x) = \frac{1}{x} \quad v'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x} \cdot 2 \cdot \sqrt{x}}$

$= \frac{1}{2x}$

i) $f'(x) = e^x - 5e^{-x}$

Aufgabe ② einfache Exponentialgleichungen

a) $x = 3$

b) $x = -2$

c) $5^0 = 1$, also

$\frac{1}{2}x + 7 = 0$

$\Rightarrow x = -14$

d) $x = -1$

e) $x = \ln 7$

$x \approx 1,946$

f) $\ln 3^x = \ln 10$

$x \cdot \ln 3 = \ln 10 \quad | : \ln 3$

$x = \frac{\ln 10}{\ln 3} \approx 2,096$

g) $x = \frac{-\ln 7}{-\ln 2} \quad \left[\begin{array}{l} \ln \frac{1}{a} = \ln a^{-1} \\ = -\ln a \end{array} \right]$

$\approx 4,087$

h) $x = -\ln 100 \approx -4,605$

i) $e^x = \frac{1}{5} = 5^{-1}$

$x = \ln 5^{-1} = -\ln 5 \approx -1,609$

j) $(7^{-1})^x = 2,5 \quad | \ln()$

$\ln(7^{-x}) = \ln 2,5$

$-x \ln 7 = \ln 2,5$

$x = -\frac{\ln 2,5}{\ln 7} \approx -0,471$

Aufgabe ③ Exponentialgleichungen

a) $e^{x+5} = 11 \quad | \ln()$

$\ln(e^{x+5}) = \ln 11$

$x+5 = \ln 11$

$x = \ln 11 - 5$

[TR] $x = -2,602$

c) $100^{-0,1x+0,5} = 30 \quad | \ln()$

$\ln(100)^{-0,1x+0,5} = \ln(30)$

$(-0,1x+0,5) \cdot \ln(100) = \ln(30) \quad | : \ln(100)$

$-0,1x+0,5 = \frac{\ln(30)}{\ln(100)} \quad | -0,5$

[TR] $-0,1x = 0,439 - 0,5$

$-0,1x = 0,239 \quad | : (-0,1)$

$x = -2,39$

e) $e^{2x} - 3e^x = 0$

$e^x(e^x - 3) = 0$

Nullprodukt $\Rightarrow e^x = 0 \rightarrow$ keine Lsg.

oder $e^x = 3 \Rightarrow x = \ln(3)$

$x = 1,099$

b) $(\frac{1}{3})^{2x+4} = 3 \quad [\frac{1}{3} = 3^{-1}] \quad | \ln()$

$\ln 3^{-(2x+4)} = \ln 3$

$-(2x+4) \ln 3 = \ln 3 \quad | : \ln 3$

$-2x-4 = 1 \quad | +4 \quad | : (-2)$

$x = -\frac{5}{2}$

d) $2e^{-x} + 2 = 3 \quad | -2$

$2e^{-x} = 1 \quad | :2$

$e^{-x} = \frac{1}{2} \quad | \ln()$

$-x = \ln(\frac{1}{2})$

$x = -\ln \frac{1}{2} = 0,693$

f) $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$

$e^x = u$, damit $e^{2x} = u^2$

$u^2 - 3u + 2 = 0$

$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} \quad u_1 = 2$

$u_2 = 1$

Rücksubstitution:

$e^x = 2 \quad x_1 = \ln 2$

$e^x = 1 \quad x_2 = \ln 1$

$= 0$

④ Anwendungsaufgaben

4.1 $f(t) = 50\,000 e^{0,2t}$ Umsatzfunktion

a) $t=0$ im Jahr 2000: $f(0) = 50\,000$

$f(12) = 551\,159 \text{ €}$

b) gesucht: t_2 mit $f(t_2) = 1\,000\,000$

$50\,000 e^{0,2t} = 1\,000\,000 \quad | : 50\,000$

c) $f'(t) = 50\,000 \cdot 0,2 \cdot e^{0,2t}$

$f'(t) = 10\,000 e^{0,2t}$

$f'(2) = 14\,918$

Nach 2 Jahren nimmt der Umsatz um

$$e^{0,2t} = 20 \quad | \ln(\quad) \quad \text{ca. 15 000 € / Jahr zu.}$$

$$0,2t = \ln 20 \quad | :0,2$$

$$t = 5 \ln 20 \approx 15 \hat{=} 5$$

Der Umsatz von 1 Mio. € wird voraussichtlich im Jahr 2015 erreicht.

4.2

$$a) f(0) = 25 000; f(12) \approx 45 600$$

$$b) f'(x) = 25000 \cdot 0,05 e^{0,05x} \\ = 1250 e^{0,05x}$$

$$f'(0) = 1250; f'(12) = 2278$$

Der Bevölkerungszuwachs beträgt zu Beginn 1250 Einw./Jahr, nach 12 Jahren ca. 2300 Einw./Jahr.

$$c) f(x) = 100 000$$

$$25000 \cdot e^{0,05x} = 100 000 \quad | :25000 \\ e^{0,05x} = \frac{100 000}{25 000} \quad | \ln(\quad)$$

$$0,05x = \ln 4 \quad | :0,05 \\ x \approx 27,7$$

Im Jahr 2027 erreicht der Ort eine Einwohnerzahl von 100 000 Einwohner

Aufgabe ⑤ Funktionsfamilien I

$$f_t'(x) = t^2 e^x - t^2 \quad t \in \mathbb{R} \setminus 0$$

$$1) \text{ Notw. Bed.: } f_t'(x) = 0$$

$$t^2 e^x - t^2 = 0 \quad | +t^2$$

$$t^2 e^x = t^2 \quad | :t^2$$

$$e^x = 1$$

$$x = 0$$

$$2) \text{ Hinr. Bed.: } f_t''(x) = t^2 e^x$$

$$f_t''(0) = 1 > 0 \Rightarrow \text{TP, wenn } t \neq 0!$$

$$3) \text{ Koordinate: } f_t(0) = t^2 e^0 - t^2 = 0$$

Der Graph von f_t hat einen Tiefpunkt an $T(0 | t^2)$

Aufgabe ⑦ Integrale

$$a) \left[\frac{1}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + x \right]_1^2 = \frac{16}{4} + \frac{16}{3} + 2 - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 1 \right) \\ = 11 \frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{5}{4} = \frac{32}{3} - \frac{5}{4} = \frac{128-15}{12} = \frac{113}{12}$$

$$b) \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x+3)^3 \right]_0^2 = \frac{1}{6} (4+3)^3 - \left(\frac{1}{6} \cdot (0+3)^3 \right) \\ = \frac{1}{6} \cdot 7^3 - \frac{1}{6} \cdot 27 = \frac{343-27}{6} = \frac{316}{6} = \frac{158}{3}$$

Aufgabe ⑧ Stammfunktionen:

$$a) f(x) = \frac{1}{4} e^{4x}$$

$$b) f(x) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot e^{2x-2} + \frac{1}{4} x^4 = \frac{3}{2} e^{2x-2} + \frac{1}{4} x^4$$

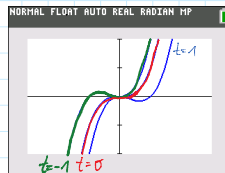
$$c) f(x) = \pi \cdot \pi \cdot (-\cos(\pi x - 2\pi)) = -\pi^2 \cos(\pi x - 2\pi)$$

$$d) f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} (3x-2)^6 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{36} (3x-2)^6$$

⑥ Funktionsfamilien II

$$f_t(x) = (x-t)x^2 = x^3 - tx^2$$

a) Skizze:



$$b) \text{ Achsenschnittpunkte: } f_t(0) = 0 \Rightarrow N_1(0|0)$$

$$f_t(x) = 0 \quad (x-t)x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad | \text{no.} \\ x_2 = t$$

Die Fragestellungen zu c) und d) hat der Drucker geschluckt. Erschließt sie Euch ausgehend von der Lösung:

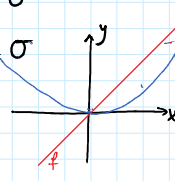
⇒ c) Jeder Graph hat einen Schnittpunkt mit der y-Achse, bzw. jeder Graph f_t geht durch den Ursprung, für $t=0$ ist dies der einzige Achsenschnittpunkt, für $t \neq 0$ kommt $N_2(t|0)$ dazu.

⇒ d) Der Schnittpunkt verschiebt sich nach rechts.

$$c) \left[\frac{1}{2} x^2 + \sin x \right]_1^3 = \frac{9}{2} + \sin 3 - \left(\frac{1}{2} + \sin 1 \right) \\ = \frac{9}{2} + \sin 3 - \frac{1}{2} - \sin 1 = 4 + \sin 3 - \sin 1$$

$$d) \int_3^4 (x^2 + x^{-3}) dx = \left[-x^{-1} - \frac{1}{2} x^{-2} \right]_3^4 \\ = -\frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 16} - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2 \cdot 9} \right) = \underbrace{-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}}_{-\frac{9}{36} + \frac{12}{36}} + \underbrace{-\frac{1}{32} + \frac{1}{18}}_{-\frac{9}{288} + \frac{16}{288}} \\ = \underbrace{-\frac{9}{36} + \frac{7}{18}}_{\text{bis hierher von Hand reicht}} = \frac{31}{288}$$

Aufgabe 9 Flächeninhalte:

- a) 1) Schnittpunkte [Integrationsgrenzen, Teilflächen]: $x = \frac{1}{2}x^2$ / $-x$ $LS=RS$ c) 1) Nullstellen: $-x(x^2-4)=0$
 $x_1=0; x_2=2$ $\begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x = 0 \\ x(\frac{1}{2}x - 1) = 0 \end{cases}$ $x_1=0; x_2=-2; x_3=2$
 2) Skizze um gegenseitige Lage zu bestimmen: 
 In $J=[0;2]$ ist $f > g$
 3) $\int_0^2 (x - \frac{1}{2}x^2) dx = [\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3]_0^2 = \frac{2}{2} - \frac{2^3}{6} = 1 - \frac{8}{6} = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$ FE
 2) Teilflächen: $A_1: [(-\frac{1}{4}x^4 + 2x^2)]_{-2}^0 = 0 - (-\frac{16}{4} + 8) = 4 - 8 = -4$
 $A_2: [\dots]_0^2 = (-\frac{16}{4} + 8) = 4$
 3) $A_1=4; A_2=4$
 $A_{ges} = 8$ [FE]

- b) $\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}x^3 - x^2 + \frac{1}{2}x \\ y_2 = -\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2} \end{cases}$ 2nd CALC 5: intersection
 $\rightarrow x_1 = -1; x_2 = 1$

Im Hauptbildschirm

MATH 9: $\int_{-1}^1 \text{abs}(y_2 - y_1) dx$
 $= 0,6 = \frac{2}{3}$ FE

Wobei dies nicht über
 intersection ermittelbar,
 da es sich um Berührungspunkt
 handelt. S. unter 2nd **TABLE**

Alternative: $y_3 = \text{abs}(y_2 - y_1)$, 2nd CALC 2: zero, falls nicht
 schon hier oben die Schnittpunkte berechnet wurden.
MATH **NUM** 1: abs Differenzfkt.

2nd **CALC** 7: $\int f(x) dx$, y3 aufrufen,

Lower / upper Limit, so.

Aufgabe 10

a) $\int_0^3 -0,4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 15$

x-Achse: Zeit in h
 y-Achse: w in km/h

$\rightarrow$ Fläche: (x-Achsenabschnitt)(y-Achsenabschnitt)

$\rightarrow$ Einheit der Fläche: h $\cdot \frac{km}{h} = km$

$\Rightarrow$ Bedeutung im Kontext: gefahrene km.

Berechnung: **GTR** $y_1 = f(x)$

2nd **CALC** 7: $\int f(x) dx$ lower lim = 0, upper lim = 3, $\int = 50,4$

Der Radfahrer ist in 3h 50,4 km gefahren.

b) $\int_0^{20} (-\frac{1}{4}x^2 + 5x) dx = 333,3$

Einheit: Tage $\cdot \frac{mm}{\text{Tag}} = mm$

Kontext: Die Pflanze ist in den ersten 20 Tagen
 um 33,3 cm gewachsen.

c) $\int_0^{12} (0,0025x^4 - \frac{7}{30}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 50x) dx$
 $= 1040,64$

Einheit: Monate $\cdot \frac{\text{Neuinfizierte Tiere}}{\text{Monat}} = \text{Neuinf. Tiere}$

Kontext: Innerhalb von 12 Monaten wurden
 insgesamt 1040 Tiere infiziert.

d) $\int_0^8 (-x^3 + 10x^2 - 20x) dx = 42,7 mm$

Einheit: Stunden $\cdot \frac{\text{Veränd. in mm}}{\text{Stunde}} = \text{Veränd. in mm}$

Kontext: Innerhalb von 8 Stunden ist der
 Wasserstand um 42,7 mm = 4,27 cm gestiegen.

11) Weitere Aufgaben im Buch: Die Lösungen befinden sich im Buch auf S. 425 f.