HA: S.117 11. $I=[1;z]$ $z \to \infty$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad I = [1;z]$

$$V = \pi \cdot \int_1^z (x^{-1})^2\,dx = \pi \int_1^z (x^{-2})\,dx = \pi\left[-x^{-1}\right]_1^z = \pi\big(\underbrace{-z^{-1}}_{\to 0} \underbrace{-(-1)}_{+1}\big)$$

für $z \to \infty$ gilt: $-z^{-1} = -\frac{1}{z} \to 0$; also $V(z) \to \pi \cdot 1 = \pi$

Das Volumen des Rotationskörpers ist begrenzt und nimmt für $z \to \infty$ $\underline{\underline{\pi \approx 3{,}14}}$ VE ein.

S.122 18. Berechnung des Kugelvolumens

a.) Formel: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; $r = 3\,cm \Rightarrow V = \frac{4}{\cancel{3}}\cdot\pi\cdot 3^{\cancel{3}\,2} = \underline{\underline{36\pi}}$

Integral: s. Figur 4: $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$\Downarrow$

$I = [-r;r]$ $\qquad V = \pi \int_{-r}^{r} f(x)^2\,dx$ $\qquad \sqrt{}^2$ hebt s. auf

mit $r = 3$: $\quad V = \pi \int_{-3}^{3} (9 - x^2)\,dx = \pi\left[9x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-3}^{3}$

$= \pi\big(27 - 9 - (-27 + 9)\big) = \pi(54 - 18)$

$= \underline{\underline{36\,\pi}}$, s.o. ☺

b.) Herleitung der Formel, indem Kugelvolumen über das Integral mit r als Parameter berechnet wird:

$V = \pi \int_{-r}^{r} \sqrt{(r^2 - x^2)}^{\,2}\,dx$ $\qquad \sqrt{}^2$ hebt sich auf.

$V = \pi\left[r^2x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-r}^{r} = \pi\left(r^3 - \frac{1}{3}r^3 - \left(-r^3 + \frac{1}{3}r^3\right)\right)$

$= \pi r^3\left(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \pi\left(r^3\left(2 - \frac{2}{3}\right)\right) = \boxed{\frac{4}{3}\pi r^3}$ s. Formel ...