Zusammenhang Ergebnismatrix LGS und geometrische Bedeutung gegenseitige Lage Geraden

– Erarbeitung –

1. Fall: Sich schneidende Geraden: z.B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

gleichsetzen ergibt: $\left\{\begin{aligned} 1 + 2r &= 3 + s \\ 4 + 4r &= 8 + 2s \\ 5 + 6r &= 11 - 2s \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{3x3 Mx}]{\text{als}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 \\ 6 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{GTR}]{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix}$ *

d.h. $r = 1$; $s = 0$; mit $s = 0$ in h eingesetzt, ergibt sich $S(3|8|11)$.

2. Fall: a) parallele Geraden: z.B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{aligned} r + 2s &= 0 \\ 2r + 4s &= 0 \\ 3r + 6s &= 1 \end{aligned}\right\}$

gleichsetzen ergibt: $\left\{\begin{aligned} 1 + r &= 1 - 2s \\ 1 + 2r &= 1 - 4s \\ 1 + 3r &= 2 - 6s \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{3x3 Mx}]{\text{als}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{GTR}]{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ **p

b) windschiefe Geraden: z.B. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{aligned} r - 2s &= 1 \\ 2r - 2s &= 0 \\ 3r - 3s &= 0 \end{aligned}\right\}$

gleichsetzen ergibt: $\left\{\begin{aligned} 1 + r &= 1 + 2s \\ 1 + 2r &= 1 + 2s \\ 1 + 3r &= 2 + 3s \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{3x3 Mx}]{\text{als}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{GTR}]{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix}$ **w

3. Fall: Identische Geraden: z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + l \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

gleichsetzen ergibt: $\left\{\begin{aligned} 1 + 2k &= 3 + l \\ 2 + 2k &= 4 + l \\ 3 + 2k &= 5 + l \end{aligned}\right\} \xrightarrow[\text{3x3 Mx}]{\text{als}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{GTR}]{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 1 \\ \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ ***

Zusammenhang Ergebnismatrix LGS und geometrische Bedeutung gegenseitige Lage Geraden

– Übersicht – Zusammenfassung der Ergebnisse unter Erarbeitung –

Unterscheide 3 Fälle der Lösungsmenge bei LGS	1. Fall: eine Lösung	2. Fall: keine Lösung	3. Fall: ∞ viele Lösungen
geometrische Interpretation	die Geraden haben einen Punkt gemeinsam ≙ schneiden sich	die Ger. haben keinen Punkt gemeinsam → sind parallel — sind windschief	die Geraden haben ∞ viele Punkte gemeinsam ≙ sind identisch
Aussehen der Erg.matrix	* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \square \\ 0 & 1 & \square \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	**p $\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ **w $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	*** $\begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Bei der Untersuchung der Lagebez. von Geraden reicht es also eigentlich, allein das GTR-Ergebnis richtig zu interpretieren. Dennoch sollte diese Interpretation durch genaues Vergleichen der Geradengleichungen nochmals überprüft werden: Richtungsv. lin. abhängig? Stützvektoren evtl. schon identisch?

Übungsaufgabe zur Lösung von 3×4-Matrizen (LGS mit 3 Unbekannten)

S. 215 ③ a) Erg.matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix} \to$ Widerspruch $\leftarrow$ $\xrightarrow{\text{zugeh. LGS}} \begin{Bmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_3 = 0 \\ \boxed{0 = 1} \end{Bmatrix}$ $\mathbb{L} = \{ \}$

b.) Erg.matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & \frac{1}{2} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix} \to$ wahre Aussage

$\mathbb{L} = \{(5t+3;\ 2t+\frac{1}{2};\ t)\}$ unendlich viele Lös.

* siehe nächste Seite

c.) Erg.matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix} \to$ Widerspruch $\Rightarrow \mathbb{L} = \{ \}$

* Interpretation einer Matrix, deren letzte Zeile die Gestalt $\boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}$ hat:

Zugehöriges LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 \qquad - 5x_3 & = & 3 \\ x_2 - 2x_3 & = & \frac{1}{2} \\ 0x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

mit $x_3 = t$ und $x_2 = \ldots$ ergibt sich $x_1 = 5t + 3$

mit $x_3 = t$ ergibt sich $x_2 = 2t + \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ x_3 beliebig, z.B. $x_3 = t$

Zu $t \in \mathbb{R}$ beliebig ergeben sich unendlich viele Lösungen der Form $\{(5t+3, 2t+\frac{1}{2}, t)\}$.

Ähnliche, nachvollziehbare Erklärung im Buch auf Seite 216/217 „3. Fall" + Beispiel.