Vorbereitung der 3. Klausur am 30.5.2014

Notiztitel 08.05.2014

I. GERADENGLEICHUNGEN AUFSTELLEN

I.1 Bestimme die Gleichung der Geraden durch $A(1|2|3)$ und $B(-2|-1|-3)$. o.GTR

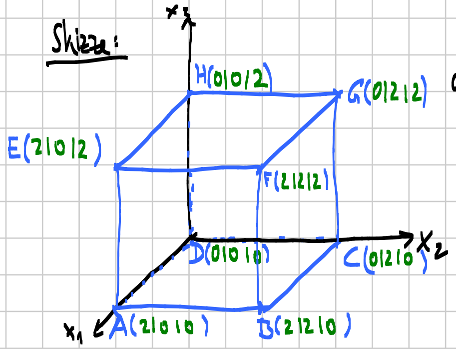
$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2-1\\-1-2\\-3-3\end{pmatrix}, \text{ also } \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\-6\end{pmatrix}$$

[und viele andere Lösungen, dabei muss aber der Ri.v. Lin. abh. von diesem Ri.v. sein]

I.2 Der Würfel ABCDEFGH hat die Kantenlänge 2. Der Punkt D liegt im Ursprung.

Gib die Gleichungen von 3 Geraden (s.u.) durch die angeg. Eckpunkte des Würfels an. o.GTR

Skizze:



a) Gerade durch B und F: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

b) Gerade durch A und H: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0-2\\0-0\\2-0\end{pmatrix}$

also $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\2\end{pmatrix}$

c) Gerade durch C und E: $i: \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$

bitte auf Vollständigkeit achten: $\vec{x} = \ldots$; Parameter nicht vergessen!

I.3 Um einen Tunnel zu bauen, beginnen zwei Bautrupps von den Enden aus zu graben.

Trupp A gräbt von $A(-0{,}4|1{,}6|3{,}6)$ in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$,

Trupp B von $B(3|-1|2)$ zunächst zum Punkt $P(3{,}4|-0{,}7|2{,}1)$ m.GTR

a) Stelle die Gleichungen der Geraden auf, entlang derer die Trupps bohren.

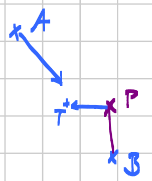
Trupp A: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}-0{,}4\\1{,}6\\3{,}6\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}$ [Richtungsvektor ist direkt gegeben!]

Trupp B: $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}3{,}4-3\\-0{,}7-(-1)\\2{,}1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0{,}4\\0{,}3\\0{,}1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\1\end{pmatrix}$

b) Lösung siehe unter IV. Gegenseitige Lage von Geraden

c) In welche Richtung muss Trupp B nun weitergraben, wenn sich die beiden Trupps im Punkt $T(3{,}6|0{,}6|2{,}6)$ treffen sollen?

Skizze:



Richtung von P nach T: $\begin{pmatrix}3{,}6-3{,}4\\0{,}6-(-0{,}7)\\2{,}6-2{,}1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}2\\1{,}3\\0{,}5\end{pmatrix}$

Trupp B muss in Richtung $\begin{pmatrix}0{,}2\\1{,}3\\0{,}5\end{pmatrix}$ weiter graben.

II. PUNKTPROBE

II. ① Fortsetzung von Aufgabe I. ③ m. GTR

d.) Muss Trupp A ebenfalls eine Richtungsänderung vornehmen?

Kommt A in T an? Punktprobe mit T in Geradengleichung, die den Weg von Trupp A modelliert:

$$\begin{pmatrix}-0{,}4\\1{,}6\\3{,}6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3{,}6\\0{,}6\\2{,}6\end{pmatrix}\quad\left\{\begin{array}{l}-0{,}4-4\cdot 1=3{,}6\\1{,}6-1\cdot 1=0{,}6\\3{,}6-1\cdot 1=2{,}6\end{array}\right\}$$

Mit $r=1$ sind alle Gleichungen erfüllt, A muss also keine Richtungsänderung vornehmen.

II. ② a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$ $R(-1\,|\,-3{,}5\,|\,W)$

$$\left\{\begin{array}{lcl}2+2r&=&-1\\1+3r&=&-3{,}5\\0-r&=&?\end{array}\right\}\begin{array}{l}\Rightarrow 2r=-3\rightarrow r=-\frac{3}{2}\\\Rightarrow 3r=-4{,}5\rightarrow r=-\frac{3}{2}\\\Rightarrow \text{Mit } r=-\frac{3}{2} \text{ ergibt sich für } W=\frac{3}{2}.\end{array}$$

Koordinaten von $R(-1\,|\,-3{,}5\,|\,1{,}5)$

b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\y\\2\end{pmatrix}$; $R(4\,|\,5\,|\,z)$ o. GTR

$$\begin{array}{l}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\end{array}\left\{\begin{array}{lcl}3+r&=&4\\1+ry&=&5\\-1+2r&=&z\end{array}\right\}$$

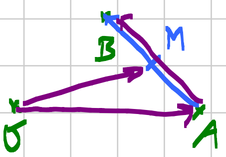
Aus I: $3+r=4$ ergibt sich $r=1$. In II ergibt $y=4$.

Mit $r=1$ in III folgt $z=1$. $R(4|5|1)$ liegt auf $g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix}$ für $r=1$.

III. ABSTAND, MITTELPUNKT

III. ① $A(1|2|3)$ und $B(-2|-1|-3)$ liegen auf der Geraden g.

a) Bestimme die Koord. des Mittelpunkts M der Strecke $\overline{AB}$. o. GTR



gesucht: $\overrightarrow{OM}$. Es gilt: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{OM}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-2-1\\-1-2\\-3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-\frac{3}{2}\\2-\frac{3}{2}\\3-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}5\\0{,}5\\0\end{pmatrix}$$

b.) Gib die koordinaten eines Punktes an, der nicht auf g liegt und von A den Abstand 2 hat.

Gesucht: $P(x_1|x_2|x_3)$ mit $|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{(1-x_1)^2+(2-x_2)^2+(3-x_3)^2} = 2$

Setze z.B. $x_2=2$, $x_3=3$, dann muss gelten $(1-x_1)=2$, also $x_1=-3$

Punktprobe von $P(-3|2|3)$ mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ muss Widerspruch ergeben:

$$\left.\begin{array}{ll} 1-3s=-3 & s=\frac{4}{3} \\ 2-3s=2 & s=0 \\ 3-6s=3 & \end{array}\right\} \rightarrow \text{Wid.} \Rightarrow P \notin g.$$

$P(-3|2|3)$ hat von A Abstand 2.

(andere Begr.: P kann nicht auf g liegen, da P sich von A nur in x_1 unterscheidet, der Ri-v. aber $x_2 \neq 0$.

III.② Untersuche, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist: o. GTR

a.) $A(1|-2|2)$, $B(3|2|1)$, $C(3|0|3)$.

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+4^2+(-1)^2} = \sqrt{21}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2+2^2+1^2} = \sqrt{9} = 3$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{0^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{8}$

ABC ist nicht gleichschenklig, da alle Seiten unterschiedlich lang sind.

b.) $A(7|0|-1)$, $B(5|-3|-1)$, $C(4|0|1)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+9+0}$

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+0+4}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1+9+4}$

→ Ja, da $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$ ist ABC gleichschenklig.

III ③ d soll die Länge von $\overrightarrow{AB}$ sein. Berechne die fehlenden Koordinaten von A und B.

$d=\sqrt{17}$; $A(1|a|3)$, $B(2|4|-1)$ o. GTR

$\sqrt{17} = \sqrt{(2-1)^2+(4-a)^2+(-1-3)^2}$ $\quad |\,{}^2$; vereinfache

$17 = 1 + (4-a)^2 + 16$ $\quad |-17$

$0 = (4-a)^2 \Rightarrow \underline{\underline{a=4}}$, also $A(1|4|3)$.

IV. GEGENSEITIGE LAGE VON GERADEN

IV.① Teilaufgabe b) von I.③

m. GTR

Die Trupps werden sich in der zunächst gewählten Richtung nicht treffen, denn die Geraden schneiden sich nicht:

$$\left\{\begin{array}{l} -0{,}4 + r\cdot 4 = 3 + s\cdot 4 \\ 1{,}6 - r = -1 + s\cdot 3 \\ 3{,}6 - r = 2 + s \end{array}\right\} \xrightarrow[\text{Matrix } 3\times 3]{\text{als}} \begin{array}{ccc} r & s & \text{Zahl} \end{array} \begin{pmatrix} 4 & -4 & 3{,}4 \\ -1 & -3 & -2{,}6 \\ -1 & -1 & -1{,}6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{GTR}]{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Widerspr.}$$

IV.② Untersuche die jeweilige gegens. Lage von g, h und k. Gib den Schnittpkt an, falls ex.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

g und h: $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{GTR}]{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ d.h. g und h schneiden sich mit $r=-2$ bzw. $\underline{s=0}$ ergibt sich $\underline{S(3|-4|-6)}$.

g und k: $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{GTR}]{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix}$ → Widerspruch, → Wahre Aussage } g und k schneiden sich nicht. Die Ri.-v. sind lin. abh.
⇒ g und k sind <u>parallel</u>.

h und k: $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{GTR}]{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix}$ → Wid. ⇒ h und k sind <u>windschief</u>.

IV.④ g und h schneiden sich nicht. Gib Stütz- und Richtungsvektor so an, dass g und h windschief bzw. parallel sind.

o.GTR

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ b \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

1. g und h parallel: $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ d \end{pmatrix}$ sollen linear abhängig sein, sollen also Vielfache voneinander sein, mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot 2 = \begin{pmatrix} 2 \\ c \\ d \end{pmatrix}$ gilt: $c=6$, $d=8$

Damit g und h nicht identisch, setze z.B. $a=2$, $b=2$. [Viele Lös. nicht gleichz. $a=7$ und $b=6$]

② g und h windschief: $\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}2\\c\\d\end{pmatrix}$ sollen linear unabhängig sein.

z.B. $c=2, d=2$; mit $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}$ ergibt sich auch kein Schnittpunkt,

also sind g und h dann windschief. $\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$

V. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

V. ① Gib die Lösungsmenge der folgenden LGS an. o.GTR

a) $\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -6 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{array}\right\}$

individuelle Vorgehensweise

$\mathbb{L} = \{(-2; 2; 1)\}$

b) $\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 4 \end{array}\right\}$

Hier kommt man mit der Gleichsetzungsmethode am schnellsten zum Ziel: Aus I und II nach $x_1 + x_2$ aufgelöst folgt: $x_3 = 3$. Dies in III folgt $x_2 = 1$; in I folgt: $x_1 = 2$

$\mathbb{L} = \{(2; 1; 3)\}$

zu b.) Ansonsten Gauß-Verfahren:

Ia = I + III; IIa = Ia − II eliminiert x_1; mit IIIa = IIa − III, damit Stufenform erhalten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IIa} = \mathrm{Ia} - \mathrm{II}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{IIIa} = \mathrm{IIa} - \mathrm{III}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

usw.

$x_3 = 3$

V. ② a) $\left\{\begin{array}{l} -x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ 3x_1 - 2x_2 + 22x_3 = 8 \end{array}\right\}$

m.GTR

$\mathbb{L} = \{(-4; 1; 1)\}$

b) $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -3 \\ 4x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -5 \end{array}\right\}$ $\mathbb{L} = \{\ \}$

V. ③ a) $\left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 6x_2 - x_3 = -15 \\ -5x_1 + x_2 + 9x_3 = 70 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -5 \end{array}\right\}$

$\mathbb{L} = \{(-5; 0; 5)\}$

individuelle Ansätze, z.B. I − III ...

b) $\left\{\begin{array}{l} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right\}$

o. GTR, zur Kontrolle mit GTR

Vorschlag Einsetzungsmethode: II: $x_1 = 2 - x_3$ in I, III

$$\left\{\begin{array}{l} 2 - x_3 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2 - x_3 - 2x_2 + x_3 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{Ia} \\ \mathrm{IIIa} \end{array} \left\{\begin{array}{l} x_2 - 2x_3 = -2 \\ -2x_2 = 0 \end{array}\right\}$$

$x_2 = 0$ in Ia: $x_3 = 1$ in II: $x_1 = 1$

$\mathbb{L} = \{(1; 0; 1)\}$.

VI. ANWENDUNGSAUFGABEN

VI. 1. Die geradlinigen Flugbahnen zweier mit konstanter Geschwindigkeit fliegende Flugzeuge F_1 und F_2 können mithilfe eines Koordinatensystems angegeben werden. F_1 befindet sich zu Beobachtungsbeginn in $P(3|5|2)$, Flugzeug F_2 in $R(-1|3|3)$ (Angaben in km; die x_3-Koordinate gibt die Flughöhe über dem ebenen Gelände an). F_1 befindet sich nach einer Minute im Punkt $Q(-1|9|3)$, F_2 bewegt sich in Richtung $\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ mit einer Geschwindigkeit von $300\frac{km}{h}$.

a) In welchem Punkt befindet sich Flugzeug F_1 nach 3 Minuten?
Wann hat F_1 eine Höhe von 6 km?

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit von F_1 in $\frac{km}{h}$.
Wo befindet sich F_2 nach einer Minute?

b) Zeigen Sie, dass sich die Flugbahnen von F_1 und F_2 nicht kreuzen.

Wie weit sind F_1 und F_2 nach drei Minuten voneinander entfernt? Berechnen Sie den minimalen Abstand der beiden Flugzeuge.

a) $\boxed{1.}$ gesucht: Koordinaten für g_1 (modelliert Flugbahn von F_1) zum Zeitpunkt $t=3$.

$$\text{Gerade } g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-1-3\\9-5\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\1\end{pmatrix};\ t \text{ in min.}$$

für $t=3$ ergibt sich $\underline{S(-9|17|5)}$ als Ort von F_1 nach 3 min.

$\boxed{2.}$ gesucht: t, so dass x_3-Koordinate den Wert 6 annimmt. $x_3 = 2+t = 6$ für $t=4$

<u>Nach 4 min</u> hat F_1 die Höhe 6 km.

$\boxed{3.}$ gesucht: $|\overrightarrow{PT}|$ mit T als Ort von F_1 für $t=60$.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}3\\5\\2\end{pmatrix} + 60\cdot\begin{pmatrix}-4\\4\\1\end{pmatrix} \Rightarrow T(-237|245|62)$$

$|\overrightarrow{PT}| = \sqrt{(-240)^2+(240)^2+(60)^2} \approx 345$; Die Geschw.keit beträgt $\underline{345\ \frac{km}{h}}$.

$\boxed{4.}$ gesucht: Ort von F_2 nach einer Minute.

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix} + t\cdot\overbrace{\begin{pmatrix}2k\\-2k\\1k\end{pmatrix}}^{\vec{u}}$$ Es muss hier nicht gelten, dass $t=1$ einer Minute entspricht. Da hier die Geschwindigkeit gegeben ist, muss gelten: Länge des Richtungsvektors sollte $\frac{300}{60} = 5$ betragen.

$$|\vec{u}| = \sqrt{(2k)^2+(-2k)^2+k^2} = \sqrt{9k^2} = 3k \qquad 3k = 5 \Rightarrow k = \frac{5}{3}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}\frac{10}{3}\\-\frac{10}{3}\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$$; für $t=1$ ergibt sich $\underline{U\left(\frac{7}{3}\middle|-\frac{1}{3}\middle|\frac{14}{3}\right)}$.

b) 1. ges.: Gegenseitige Lage der Flugbahnen:

Als 3×3-Matrix: $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{GTR}]{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 1} \end{pmatrix} \to$ Wid. $\Rightarrow$ die Geraden, die

die jeweiligen Flugbahnen modellieren, sind windschief.

2. ges.: Abstand der Flugzeuge zueinander für $t=3$

F_1 nach 3 min: $S(-9/17/5)$ F_2 für $t=3$ (in Geradengleichung mit

angepassten Richtungsvektor): $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} \frac{10}{3} \\ -\frac{10}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$: $W(9/-7/8)$

$|\overrightarrow{SW}| = \sqrt{18^2 + (-24)^2 + 3^2} \approx 30$

Die beiden Flugzeuge sind nach 3 min ca. 30 km voneinander entfernt

3. ges.: minimaler Abstand; hierbei t als Parameter in g_1 und g_2 eingesetzt, dann

als Extremwertaufgabe gelöst.

$d(g_1, g_2) = \sqrt{\left(-1 + \frac{10t}{3} - (3-4t)\right)^2 + \left(3 - \frac{10t}{3} - (5+4t)\right)^2 + \left(3 + \frac{5t}{3} - (2+t)\right)^2}$

$= \sqrt{\left(-4 + \frac{22t}{3}\right)^2 + \left(-2 - \frac{22t}{3}\right)^2 + \left(1 + \frac{2t}{3}\right)^2}$

Als Funktion so in GTR eingeben. Minimum berechnen. Ergibt $t \approx 0{,}13$

Funktionswert an $t \approx 0{,}13$ ergibt den Abstand: 4,38 km.

VI. 2 Siehe Buch S. 269 2

a) Wähle den Punkt, an dem der Faden am Boden befestigt ist, als Koord.ursprung,

so ist eine Gleichung der Geraden $\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) Mögliche Gleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 75 \end{pmatrix} + \frac{2}{5} t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

c.) Die Spinne befindet sich zwei Minuten nach der eingezeichneten Situation

108 cm in horizontaler Richtung vom Baum entf. und in 219 cm Höhe.

VII. ALLGEMEIN LGS, GERADEN, ABSTAND: WADi - Lösungsseiten: S. 78, 79, 81

VIII. EBENEN

alle o. GTR

VIII. ① Eine der beiden Gleichungen beschreibt keine Ebene. Welche? Begründe.

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \quad ; \quad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix}5\\6\\-3\end{pmatrix} + r\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}}_{\vec{u}} + s\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}3{,}5\\0\\-1{,}75\end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

Beachte bei Ebene: Richtungsvektoren müssen linear unabhängig sein.

Test für E_1: $\left.\begin{array}{l} -2k = 1 \\ 0k = 1 \\ 1k = 0 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} k = -\frac{1}{2} \\ 1 = 0 \end{array}$ $\Rightarrow$ Wid. $\Rightarrow$ lin. unabh.;

E_2: $\left.\begin{array}{l} -2k = 3{,}5 \\ 0k = 0 \\ 1k = -1{,}75 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} k = -\frac{3{,}5}{2} = -1{,}75 \\ k \text{ beliebig} \\ k = -1{,}75 \end{array}$ $\Rightarrow$ lin. abh.!

E_2 beschreibt keine Ebene, denn die Ri.-vekt. sind lin. abh.: $-1{,}75\,\vec{u} = \vec{v}$.

VIII. ② Bestimme eine Parametergleichung der Ebene E, die die Punkte

a.) $A(3|-2|1)$, $B(4|0|-1)$, $C(-2|1|4)$

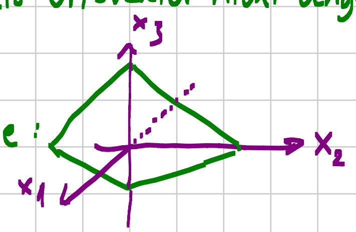
b.) $A(0|0|0)$, $B(0|1|0)$, $C(0|0|1)$ enthält.

c.) Um welche Ebene handelt es sich bei b.)?

a.) 1. Ri-v.: $\vec{AB} = \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$ 2. Ri.-v.: $\vec{AC} = \begin{pmatrix}-5\\3\\3\end{pmatrix}$ $E: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-5\\3\\3\end{pmatrix}$

b.) $\vec{x} = r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $A(0|0|0)$ muss als Ortsvektor nicht angeg. werden

c.) Es handelt sich um die x_2x_3-Ebene:



VIII. ③ a.) Liegt $P(5|12|4)$ auf der Ebene von Aufg. ①?

b.) Nenne einen Punkt Q, der auf dieser Ebene liegt, aber nicht den Stützvektor!

a.) Nein, denn das LGS, das bei Punktprobe entsteht, hat keine Lösung:

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array}\left\{\begin{array}{l} 5 = 1 - 2r + s \\ 12 = 4 + 0r + s \\ 4 = 0 + r + 0s \end{array}\right\} \Rightarrow r = 4 \text{ in I}$$

$s = 5 - 1 + 8 = 12$ in II $\Rightarrow 12 = 4 + 12$ Wid.!

$\mathbb{L} = \{\ \}$

b.) z.B. mit $s = -1$ und $t = 1$: $Q(5|-3|5)$