ARBEITSBLATT EBENEN CHECK-OUT 18.07.2014

1 a.) Koord.gleichung aus 3 Punkten.

1. Mögl.keit: Paramatergleichung aufstellen; $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ allgemein; Skalarprodukt $\vec{u} \circ \vec{n}$ und $\vec{v} \circ \vec{n}$ muss je Null ergeben; setze z.B. $n_3 = t$ an und erhalte so n_1, n_2, n_3 in Abh.keit von t. Damit Normalenform aufstellen, ausmultiplizieren, erhalte Koord.form.

2. Mögl.keit: s. Buch S.255 Bsp. 2 mit GTR

Es sei $E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ die gesuchte Ebenengleichung.

3x Punktprobe mit A, B, C muss erfüllt sein $\Rightarrow$ LGS 3x4.

Hier gilt $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1{,}5 & 1 \\ & 4 & 2{,}5 & 1 \\ 2 & -1 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \xRightarrow[\text{MATH } 1:\blacktriangleright\text{Frac}]{\text{rref}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{13} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{13} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{18}{13} \end{pmatrix}$ Wähle z.B. $d = 13$, so ergibt sich $c = 18$, $b = -8$, $a = -2$

Damit: $\boxed{E: -2x_1 - 8x_2 + 18x_3 = 13}$

Liegt $P(1|2|1)$ in E? Punktprobe: $-2 \cdot 1 - 8 \cdot 2 + 18 \cdot 1 = 13 \Leftrightarrow 8 \neq 13$ ↯ Nein, $P \notin E$.

b) F liegt parallel zur x_1x_2-Ebene und geht durch $P(0/0/2)$;

Damit: $F: x_3 = 2$ [Denn Spannv.: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegen beide in x_1x_2-Ebene und Stützpunkte haben alle $x_3 = 2$.]

c) $E: -x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 10$

<u>Spurpunkte</u>: S_1: Setze $x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow S_1(-10/0/0)$;

analog $S_2(0/2/0)$, $S_3(0/0/-5)$. Die <u>Spurgeraden</u> sind diejenigen Geraden, die durch Schnitt von E mit den Koord.ebenen entstehen, doch zugleich diejenigen Geraden durch je ein Paar Spurpkte.

Damit: $s_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $s_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

2. a.) $E: \; x_1 + 4x_2 - 9x_3 = -6{,}5$

$-2x_1 - 8x_2 + 18x_3 = 13$ identisch [verdoppelt]

$x_1 + 4x_2 - 8x_3 = -6{,}5$ Schneidet E

$\left[\vec{x} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}}_{\not\equiv P}\right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -9 \end{pmatrix} = 0$ parallel zu E, Normalenvektoren lin. abh. und $P \notin E$

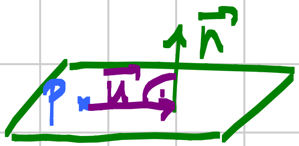
$x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 13$ $\neq 6{,}5$ parallel zu E, wegen

$\vec{x} = \begin{pmatrix} -6{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} + t \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$ Schneidet E, da zwar $\vec{n} \circ \vec{u} = 0$, aber $\vec{n} \circ \vec{v} \neq 0$

4. $2x_1 - 5x_2 + x_3 = 2$, sowie $g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$

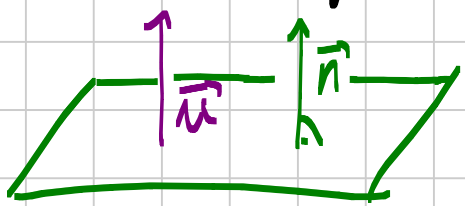
a.) $\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $P \in E$, da $2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 2$:-) ;

$\vec{u} \circ \vec{n} = 0: \; 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$, damit gilt: $\boxed{g \text{ liegt in } E}$



b.) $\vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix}$. Es gilt $\vec{u} = -2 \cdot \vec{n}$, damit gilt $\vec{u} \parallel \vec{n}$ und somit:

$\boxed{g \text{ schneidet } E \text{ orthogonal}}$:



c.) Damit g parallel zu E (oder in E liegt), muss gelten: $\vec{u} \circ \vec{n} = 0$ (s.a.)

$\boxed{\vec{u} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0}$, z.B. $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ denn $2 \cdot 1 - 5 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 0$ und unendlich viele andere Lösungen.

d.) Wie in c.), nur muss hier zusätzlich gelten, dass die Punktprobe für $P(p_1 | p_2 | p_3)$ in $E: 2p_1 - 5p_2 + p_3 = 2$ nicht erfüllt ist d.h. $\boxed{2p_1 - 5p_2 + p_3 \neq 2}$.