Exponentielles und begrenztes Wachstum

1. In der Tabelle sind die Daten eines exponentiellen Wachstumsvorgangs gegeben.

n	0	1	2	3	4	5	6
B(n)	50 *	110	250	550	1230 **	2730	6080

Beschreiben Sie das Wachstum mit einer Funktion:

1. Grundaufgabe

a) mithilfe des Mittelwertes der Quotienten aufeinanderfolgender Werte.

n	0	1	2	3	4	5	6
$\frac{B(n)}{B(n-1)}$		2,20	2,27	2,20	2,24	2,22	2,23

Mittelwert: 2,23 ; also $f(t) = \overset{*}{50} \cdot 2{,}23^t = 50 \cdot e^{0{,}8t}$ [denn $\ln(2{,}23) = 0{,}8$]

2. Gr. aufgabe

b) mithilfe des Anfangswertes und eines geeigneten weiteren Datenpunktes.

$f(t) = 50 \cdot e^{k \cdot t}$; $f(4) = 50 \cdot e^{k \cdot 4} = \overset{**}{1230} \Rightarrow 4k = \ln\left(\frac{1230}{50}\right) \Rightarrow k = 0{,}80$, also $f(t) = \ldots$ s.o.

$f(0)$, Anfwert

2. Berechnen Sie die Verdopplungszeit T_V bzw. die Halbwertszeit T_H.

a) $f(t) = 2000 \cdot e^{0{,}2133t}$

$T_V =$

b) $f(t) = 1500 \cdot e^{-0{,}4102t}$

$T_H =$

c) $f(t) = 5000 \cdot 0{,}8^t$

$f(t) = 5000 \cdot e$

d) $f(t) = 100 \cdot e^{0{,}1154t}$

$T_V =$

3. Die Halbwertszeit des radioaktiven Isotops Tantal 180 beträgt 138 Tage. Hier kein beschr.

a) Bestimmen Sie die Zerfallsfunktion. = U-fkt. mit $0 < a < 1$ bzw. $t < 0$ Wachstum!

$k = \frac{\ln(0{,}5)}{T_H} \approx -0{,}0050$; also $f(t) = f(0) \cdot e^{-0{,}005t}$

b) Wann ist noch ein Viertel der ursprünglichen Menge vorhanden? „Viertelwertszeit"

$f(t) = f(0) \cdot e^{-0{,}005t} = 0{,}25 f(0) \Rightarrow e^{-0{,}005t} = 0{,}25 \Rightarrow t \approx 277{,}26$ [direkt $T_{\frac{1}{4}} = \frac{\ln(\frac{1}{4})}{k}$]

Nach ca. 278 Tagen ...

c) Wie viel Prozent ist nach 200 Tagen zerfallen?

$f(200) = f(0) \cdot e^{-0{,}005 \cdot 200} = f(0) \cdot e^{-1} = 0{,}37 f(0)$ D.h. noch 37% des Anf.bestands.

$\Rightarrow 1 - 0{,}37 = 0{,}63$: 63 % ist zerfallen.

d) Nach 220 Tagen sind noch 10 mg vorhanden. Berechnen Sie den Anfangsbestand.

$f(220) = f(0) \cdot e^{-0{,}005 \cdot 220} = 10$ ... Nach $f(0)$ auflösen ... $\approx 30{,}04$

$\Rightarrow$ zu Beginn waren ca. 30 mg vorhanden.

e) Wie groß ist in diesem Fall die Zerfallsgeschwindigkeit nach 10 Tagen?

$f'(t) = -0{,}005 \cdot 30 \cdot e^{-0{,}005t}$ .. $f'(t) = -0{,}14$

Die Z.geschw. beträgt ca. $-0{,}14$ mg/Tag.

4. Die Entwicklung einer Population von Kaninchen kann durch beschränktes Wachstum modelliert werden. Zu Beginn sind 300 Kaninchen vorhanden, nach 6 Monaten sind es 500. In dem Gebiet können maximal 800 Kaninchen leben.

a) Beschreiben Sie den Bestand mit begrenztem Wachstum durch eine Funktion.

S = ; f(x) = $- c \cdot e^{-kx}$; f(0) =

f(6) =

b) Wie viele Kaninchen sind es nach einem Jahr, wie viele nach zwei Jahren?

c) Nach wie vielen Monaten sind 700 Kaninchen vorhanden?

d) Wie hoch ist die Wachstumsgeschwindigkeit zu Beginn, wie hoch ist sie nach einem Jahr?

Seite aus: Lambacher Schweizer Analysis Begleitmaterial
ISBN-13: 978-3-12-735712-7