LÖSUNGEN ZU DEN

VORBEREITUNGSAUFGABEN ZUR 2. KLAUSUR 12e AM 18.12.2014

PFLICHTTEIL: I. Ableiten

Bestimme die 1. Ableitung der folgenden Funktionsterme:

a.) $f(x) = x^2 \ln(2x)$

PR+KR $f'(x) = 2x \ln(2x) + x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2x}} \cdot 2$

$= 2x \ln(2x) + x$

b.) $f(x) = \frac{1}{2} x \cdot e^x$

$f'(x) = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2} x e^x$

$= \frac{1}{2} e^x (1 + x)$

c.) $f(x) = \frac{4}{(2-x)^2}$

formen um

$f(x) = 4(2-x)^{-2}$

$f'(x) = -2 \cdot 4 \cdot (2-x)^{-3} \cdot (-1)$

$f'(x) = \frac{8}{(2-x)^3}$ KR

Bei Quot.-regel kann gekürzt werden $\frac{4 \cdot 2 \cdot \cancel{(2-x)}}{(2-x)^{\cancel{4}\,3}}$

d.) $f_t(x) = 2t \cdot e^{5x}$

FAKTOR 2t BLEIBT $f_t'(x) = \overbrace{10t}^{5 \cdot 2t} e^{5x}$

e.) $f_t(x) = \frac{1}{5} x^3 - 0{,}5 t x^2 + \frac{4}{15} t^2 x$

$f_t'(x) = \frac{3}{5} x^2 - t x + \frac{4}{15} t^2$

[PAR. t WIE ZAHL BEHANDELN!]

f.) $f(x) = 4e^x (x + 0{,}5)$

PR $f'(x) = 4e^x (x + 0{,}5) + 4e^x \cdot 1 = 4e^x (x + 1{,}5)$

g.) $f(x) = \sin(2x^2)$

KR $f'(x) = 4x \cos(2x^2)$

II. Gleichungen (Entsprechend Abiaufgaben stets Aufgabe 3)

Löse die folgenden Gleichungen:

a.) $x^4 - 4x^2 + 3 = 0$ Substitution: $u := x^2$

$u^2 - 4u + 3 = 0$

$u_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$ $u_1 = 3$; $u_2 = 1$

Rücksubstitution:

$x_{1,2}^2 = 3 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$

$x_{3,4}^2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$

$\mathbb{L} = \{-\sqrt{3}; -1; 1; \sqrt{3}\}$

b.) $2x^2 + \frac{4}{x^2} = 6$ $\mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; Substitution: $u := x^2$; $u \neq 0$

$2u + \frac{4}{u} = 6$ $| \cdot u$

$2u^2 + 4 = 6$

$2u^2 - 6u + 4 = 0$ $| : 2$

$u^2 - 3u + 2 = 0$

$u_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

$u_1 = 2$; $u_2 = 1$

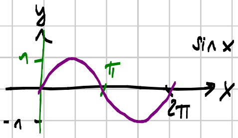
Rücksubstitution: s.o.

$\mathbb{L} = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$

c.) $\sin^2 x - 1 = 0$ in $[0; 2\pi]$! 3. binomische Formel !

$\underbrace{(\sin x + 1)}_{=0 \text{ für } x_1 = \frac{3}{2}\pi} \underbrace{(\sin x - 1)}_{=0 \text{ für } x_2 = \frac{\pi}{2}} = 0$

$\mathbb{L} = \{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\}$



oder / Substituiere: $u := \sin x$

$u^2 = 1 \Rightarrow u = \pm 1 \Rightarrow$ Rücksubstitu. $\sin x = \pm 1 \Rightarrow \mathbb{L} = \{\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\}$

d.) $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$ in $[0; 2\pi]$ Substituiere: $u := \cos x$

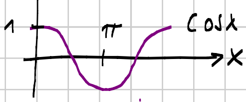
$u^2 + u - 2 = 0$

$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$u_1 = 1$; $u_2 = -2$ } ergibt keine Lös.

Rücksubst.: $\cos x = 1$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{0; 2\pi\}$



e.) $\underbrace{(2x^2 - 2)}_{(1)} \underbrace{(e^{-x} - 2)}_{(2)} = 0$

(1) $2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$

(2) $e^{-x} = 2 \Rightarrow -x = \ln 2 \Rightarrow x = -\ln 2$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-1; 1; -\ln 2\}$

1.) $1 - \frac{4x}{x^2-3} = 0$; $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3}\}$ Bruchgleichungen sind an Nullstellen des Nenners nicht definiert!

mit Nenner $(\neq 0)$ $[x^2-3]$ durchmultipliziert ergibt:

$x^2 - 3 - 4x = 0$ umordnen: $x^2 - 4x - 3 = 0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16+12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \cdot 7}}{2}$ $\quad x_1 = 2+\sqrt{7}$, $x_2 = 2-\sqrt{7}$ $\Big\}$ $\mathbb{L} = \{2-\sqrt{7}; 2+\sqrt{7}\}$

Löse auch $1 - \frac{4x}{x^2+3} = 0$, hier gilt $\mathbb{L} = \{1; 3\}$

g) $1 = \frac{1}{e^x} + \frac{2}{e^{2x}} \quad | \cdot e^{2x} \; (\neq 0)$

$e^{2x} = \frac{\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^x}} + \frac{2\cancel{e^{2x}}}{\cancel{e^{2x}}}$ $\quad$ [Bem: $e^{2x} : e^x = e^{2x-x} = e^x$]

$e^{2x} = e^x + 2$ $\quad$ Substituiere: $u := e^x$

$u^2 - u - 2 = 0$

$u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$\underbrace{u_1 = -1}_{\text{ergibt keine Lös.}}$ $\quad u_2 = 2$

Rücksubst.: $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

$\mathbb{L} = \{\ln 2\}$

III. Funktionen und Schaubilder (entsprechend Abiaufgaben stets Aufgabe 4)

Hier geht es in der Klausur im Wesentlichen um Verschiebung, Streckung, Spiegelung, Asymptoten, je nach Funktionstyp. Im Abi ist diese Aufgabe sehr vielschichtig, es wird auch mal eine Tangentenaufgabe bzw. Flächenber. verlangt.

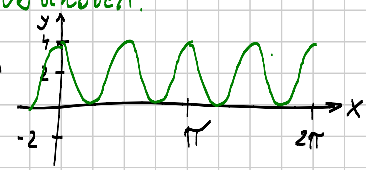
a.) Gegeben ist $f(x) = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 1$.

Erkläre, wie der Graph von f aus der Grundfunktion $f(x) = \sin x$ entsteht.

Die Amplitude ist 3, d.h. der Graph ist in y-Richtung um Faktor 3 gestreckt.

Die Periode ist 2π, wie bei der Grundfunktion; sie ist jedoch um $\frac{\pi}{2}$ LE nach links und um 1 LE nach unten verschoben.

b.) Gib einen möglichen Funktionsterm zur skizzierten Funktion an. $f(x) = 2 \cdot \cos(4x) + 2$

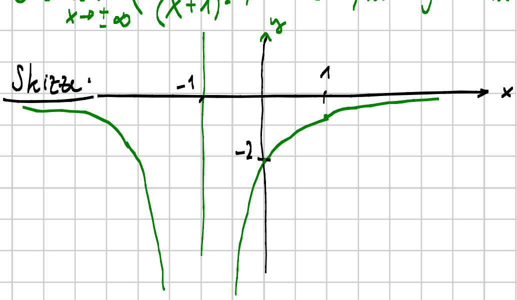


c.) $f(x) = -\frac{2}{(x+1)^2}$ Bestimme die Asymptoten und skizziere das Schaubild.

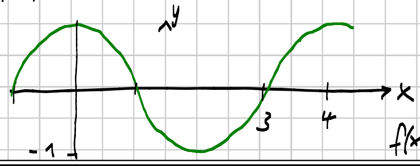
$x = -1$ ist senkrechte Asymptote

Da $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(-\frac{2}{(x+1)^2}\right) \to 0$, ist $y = 0$ waagerechte Asymptote.

Skizze:



d) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi(x+1)\right)$. Skizziere das Schaubild und gib die Periode an.



$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi} = \underline{\underline{4}}$

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{2}\pi\right)$, also Verschiebung um $\frac{1}{2}\pi$ n.li.