IV. Einfache Aufgabe aus der Geometrie (entsprechend Abiaufgaben 6. Vektoren)

a) Prüfe, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist: $A(3|7|2)$; $B(-1|5|1)$; $C(2|3|0)$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1-3)^2+(5-7)^2+(1-2)^2}$ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2+1)^2+(3-5)^2+1^2}$ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(2-3)^2+(3-7)^2+2^2}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+4+1}$ $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+4+1}$ $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{1+16+4}$

$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}|$, also ist $\triangle ABC$ gleichschenklig.

b) Prüfe, welches Paar der vier Vektoren senkrecht aufeinander steht.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix},\ \vec{d} = \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$\vec{a}\circ\vec{b} = -1-4 = -5$; $\vec{a}\circ\vec{c} = -2$; $\vec{a}\circ\vec{d} = -2$; $\vec{b}\circ\vec{c} = 2+4 = 6$

$\vec{b}\circ\vec{d} = 2-2 = 0$; $\vec{c}\circ\vec{d} = 4-2 = 2$ Es gilt: $\vec{b} \perp \vec{c}$

c) Liegen die gegebenen Punkte A, B, C auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$?

$A(3|-1|-1)$ $B(0|-10|3)$ $C(4{,}5|3{,}5|2)$

A: $\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-1\end{pmatrix} = \overrightarrow{OA} \Rightarrow$ ja! $A \in g$ [durch erraten]

B: andere Methode: $4 + r = 0 \Rightarrow r = -4$ in x_2- und x_3-Zeilen: $2-4\cdot3 = -10$ o.k.

$1-4\cdot2 = -7 \neq 3 \Rightarrow B \notin g$.

C: $4+r\cdot1 = 4{,}5 \Rightarrow r = 0{,}5$ in x_2- und x_3-Zeilen: $2+\frac{3}{2} = 3{,}5$; $1+\frac{2}{2} = 2 \Rightarrow$ ok $\Rightarrow C \in g$

d.) Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix}11{,}5\\9\\3\end{pmatrix} + s\cdot\vec{v}$

1. Zeige, dass $S(4|4|8)$ auf g liegt. Für $r=3$ gilt: $S \in g$, da $1+3=4$, $4+0=4$, $2+6=8$

2. Gib einen Vektor $\vec{v}$ an, so dass g und h sich in S schneiden.

Zeilenweise summiert: $11{,}5 - 7{,}5 = 4$; $9-5 = 4$; $3+5 = 8$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}11{,}5\\9\\3\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}7{,}5\\5\\-5\end{pmatrix}$. Mit $s=-1$ und $\vec{v}$ wie in h gilt: $S \in h$.

e) Liegen die geg. Punkte auf einer Ebene?

$A(2|4|1)$, $B(0|2|-1)$, $C(4|-2|1)$, $D(-1|9|0)$

E aus A, B, C: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix}$

$D \in E$? $\begin{pmatrix}-1\\9\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\0\end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{array}{l} -1 = 2+2r+2s \\ 9 = 4+2r-6s \\ 0 = 1+2r \end{array}\right. \qquad r = -\frac{1}{2}$$

$-1 = 2+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2s$; $-1 = 1+2s$; $-2 = 2s$

$9 = 4+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-6s$; $9 = 3-6s$; $6 = -6s$

Es ergibt $r = -\frac{1}{2}$, $s = -1$, damit gilt: D liegt in E, die 4 Punkte liegen in einer Ebene.