IV. Bei einer Bakterienkultur nimmt die Anzahl der Bakterien stündlich um 7% zu. Zu Beginn sind a Bakterien vorhanden.

a.) Gib eine Exponentialfunktion mit Basis e an, die die Anzahl der Bakterien zum Zeitpunkt t beschreibt (t in h nach Beobachtungsbeginn).

$f_a(t) = a \cdot 1{,}07^t = a \cdot e^{t \cdot \ln 1{,}07} = a \cdot e^{0{,}06766 \cdot t}$

b.) Für welchen Wert von a haben sich nach 8 Stunden ungefähr 1500 Bakterien gebildet? $f_a(8) = a \cdot e^{0{,}06766 \cdot 8} = 1500 \Rightarrow \underline{a \approx 873}$

Bei einem Anfangsbestand von ca. 873 Bakt. haben sich nach 8 h ... 1500 B. geb.

c.) mom. WT-geschw. 50 B./h?

Mom. WT-geschw.: $f_a'(t) = 0{,}06766 \cdot a \cdot e^{0{,}06766t}$

$f_a'(0) = 50 = 0{,}06766\, \underbrace{a \cdot e^0}$

$\rightarrow a \approx 739$

Bei einem Anf.-bestand von ca. 740 Bakt. beträgt die WT-gesc. w. ... 50 B./h.

V. Gegeben ist ein Wachstumsprozess durch die Funktionsgleichung $f(x) = 10 - 6e^{-0{,}05x}$. Gib die zugehörige Differenzialgleichung an. Es liegt beschränktes Wachstum vor, Funktionsterm allg.: $f(x) = S - c \cdot e^{-kx}$, $k>0$

$k=0{,}05$; $S=10$, DGL bes. WT allg.: $f'(x) = k \cdot (S - f(x))$, damit $f'(x) = 0{,}05 \cdot (10 - f(x))$

VI. Aufgabe Buch S. 191 (3)

a.) $f'(x) = 0{,}1 \cdot f(x)$ $f(x) = 0{,}02 \cdot e^{0{,}1x}$

b.) $f'(x) = -0{,}1 \cdot f(x)$

! beschränktes Wachstum !

c.) $f'(x) = -0{,}1(100 - f(x))$

d.) $f'(x) = -0{,}1(100 - f(x))$

Bei c) und d.) besteht der Unterschied lediglich im Anfangsbestand, die Veränderung ist gleich.

s. auch S. 191 – Zeit zu überprüfen –

WAHLTEIL FORTSETZUNG

III. Die durchschnittliche Sonnenscheindauer s (in Stunden) eines Monats am Bodensee soll in Abhängigkeit von der Zeit t (in Monaten) modellhaft durch eine Sinusfunktion mit $s(t) = a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ $(a, b \in \mathbb{R})$ beschrieben werden.

a.) Bestimme die Parameter a und b (mit $t = 0$ im April), wenn die Sonne im März ca. 100 h und zwei Monate später ca. 200 h scheint.

b.) Wie viele Stunden scheint die Sonne nach diesem Modell im Durchschnitt im Januar? Skizziere die Funktion für den Zeitraum eines Jahres.

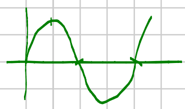
c.) In welchem Zeitraum beträgt die durchschnittliche Sonnenscheindauer mehr als 220 h pro Monat?

d.) Zeige, dass die Sonne unabhängig von den Parametern a und b zum gleichen Zeitpunkt am längsten scheint. Wann ist dies der Fall?

a.) Punktprobe mit $s(-1)$ [oder $s(11)$] $= 100$ und $s(1) = 200$

Fkt.term allg.: $s(t) = a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$

$$\begin{aligned} (1)\quad & s(-1) = a + b \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 100 \\ (2)\quad & s(1) = a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 200 \end{aligned}$$



aus (1) $\quad a = 100 - b \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

in (2) $\quad 100 - b \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 200 \quad / -100$

$\underbrace{b\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)}_{1} = 100 \quad / : \underbrace{\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) - \ldots}_{1}$

$\underline{\underline{b = 100}}$

in (1) $\quad a = 100 - 100 \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \underline{\underline{= 150}}$

damit $\quad s(t) = 150 + 100 \sin\left(\frac{\pi}{6} t\right)$

b.) $s(-3) = s(9) = 50$. Im Januar ... 50 Stunden.
z.B.

c.) <u>gesucht</u>: t, so dass gilt $s(t) > 220$ im Intervall $[0; 12]$

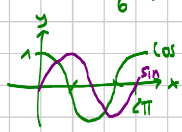
$1{,}48 < t < 4{,}5$ Von ca. Mitte Mai bis Mitte August ...

d.) <u>zu zeigen</u>: Zeitpunkt (t-Wert), an dem $s(t) = a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ maximal wird, ist unabhängig von den Parametern a und b.

<u>gesucht</u>: t, so dass $s'(t) = 0$ und $s''(t) < 0$

$s'(t) = b \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$; $s''(t) = -b \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$

$s'(t) = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{\pi}{6} \cdot b}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)}_{= 0 \text{ für } t_1 = 3,\ t_2 = 9} = 0$



<u>Lösung</u>: s wird maximal für $t = 3$, darin ist kein Parameter a oder b enthalten $\Rightarrow$ unabh.

$s''(t_1) = -b\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0 \qquad s''(t_2) = -b\left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) > 0$