KLAUSURVORBEREITUNG HYPOTHESENTESTS | Vorgehen s. Formelsammlung „Einseitiger Sigtest"

5. Übungsaufgaben

1. Eine Firma, die Handys herstellt, behauptet, dass höchstens 4% der Geräte defekt seien. Die Behauptung soll mit einer Stichprobe von 250 Stück getestet werden. Man erhält 10 defekte Handys. Kann man daraus mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% schließen, dass die Firmenangabe nicht zutrifft?

$H_0: p \leq 0{,}04$ $\quad H_1: p > 0{,}04$ re.

2. Ein Computerhersteller bezieht von einem Lieferanten Speicherchips. Erfahrungsgemäß sind 95% der Chips einwandfrei. Der Computerhersteller überprüft die Hypothese, dass mindestens 95% der Chips einwandfrei sind, mit einer Stichprobe vom Umfang 100. → das ist H_0
Die Irrtumswahrscheinlichkeit soll höchstens 10% betragen. Ermitteln Sie den $\boxed{\text{Ablehnungsbereich.}}$

H_0 $p \geq 0{,}95$ $\quad H_1: p < 0{,}95$ li.

! rechtsseitig $H_0: p < 0{,}005$ $\quad H_1$ $p \geq 0{,}05$ nicht zielführend! „=" immer in H_0!

3. Ein Labor entwickelt einen neuen Impfstoff und testet ihn in einem Tierversuch mit 900 Mäusen. Mit dem Impfstoff dürfen keine klinischen Studien an Menschen durchgeführt werden, wenn sich im Tierversuch in mindestens 2% der Fälle unerwünschte Nebenwirkungen zeigen.
Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel für einen statistischen Test auf dem 1%-Signifikanz-Niveau.

H_0 $p \geq 0{,}02$ $\quad H_1$ $p < 0{,}02$ re. (aus Sicht des Labors)

③ Wir testen linksseitig; d.h. wir suchen größte Zahl g, so dass $P(X \leq g) < 0{,}01$

$\Rightarrow g = 8$ mit $P(X \leq 8) = 0{,}0067$; $P(X \leq 9) = 0{,}0146$), damit $\bar{A} = [0;8]$; $A = [9;900]$

Entsch.regel: „Wenn bei weniger als 9 Mäusen Nebenwirk. auftreten, so ist H_0 zu verwerfen, dann darf das Arzneimittel auch an Menschen getestet werden.

① Vorgehen wie bei rechtsseitigem Test, da Beh.: $p > 0{,}04$.

Also $P(X \geq 10) < 5\%$?

$P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) < 5\%$?

$P(X \leq 9) = 0{,}455 \Rightarrow P(X \geq 10) = 0{,}545$

$\Rightarrow$ Irrtumsws. 54,5% deutl. größer!

$A = [16;250]$, 10 liegt in A!

② Wir testen, also linksseitig, die Nullhypothese hat „=" oder „≤" oder „≥", in der Alternative steht nur „<" oder „>"!

ges.: $\bar{A} = [0, g]$. g ist die durch $\alpha = 0{,}1$ bestimmte größte Zahl, für die gilt: $P(X \leq g) \leq 0{,}1 \Rightarrow g = 91$

($P(X \leq 91) = 0{,}0631$, $P(X \leq 92) = 0{,}1282$),

$\rightarrow \bar{A} = [0;91]$

$\boxed{\text{Links- oder rechtsseitiger Test? Was ist eigentlich gefragt/gesucht?}}$ → Manchmal auch nur die Irrt. Wahrs.

Übung

1. Eine Firma produziert Glühlampen, die bisher mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% länger als 1000 Stunden brannten. Nach einer Veränderung des Produktionsprozesses möchte die Firma testen, ob sich die Wahrscheinlichkeit, mit der eine Glühlampe länger als 1000 Stunden brennt, verbessert hat. Sie testet dazu 170 Glühlampen.

Wie viele Glühlampen müssen mindestens länger als 1000 Stunden brennen, damit die Firmenleitung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% davon ausgehen kann, dass sich die Qualität der Glühlampen verbessert hat?

① $H_0: p = 0,9$; $H_1: p > 0,9$ rechtss.

gesucht: Ablehnungsbereich: $A = [g; 170]$, kleinste durch $\alpha = 0,05$ bestimmte Zahl g mit

$P(X \geq g) \leq 0,05 \Rightarrow 1 - P(X \leq g-1) \leq 0,05$

$\Leftrightarrow$ kleinstes $b := g-1$ gesucht mit $P(X \leq b) > 0,95$

$\Rightarrow P(X \leq 159) = 0,9589$; $P(X \leq 158) = 0,9262 \Rightarrow b = 159$

Damit gilt für $A = [160; 170]$; d.h. mind. 160 Glühlampen müssen länger als 1000 h brennen, [damit] man die Qualitätsverbesserung als bestätigt sehen kann.

2. Ein Medikament A heilt eine Krankheit bei 85% der Patienten. Ein konkurrierender Arzneimittelhersteller behauptet, dass sein Medikament B noch besser wirkt, und führt eine Testreihe an 108 Patienten durch. Bei wie vielen Patienten muss das Medikament B die Krankheit mindestens heilen, damit man auf einem Signifikanzniveau von 1% bei Medikament B von einer besseren Wirkung als bei Medikament A ausgehen kann?

Das Med. muss bei mind. 101 Personen anschlagen, damit...

② $H_0: p = 0,85$; $H_1: p > 0,85$ rechtss.

gesucht: Ablehnungsbereich, $A = [g; 108]$

kleinstes $\underbrace{b}_{\boxed{g-1}}$ mit $P(X \leq b) > 0,99$: $A = [\underbrace{101}_{\boxed{b=100}}; 108]$

3. Bei Reihenuntersuchungen in der Schule werden in der Regel bei 15% der Schüler Zahnschäden festgestellt, die eine weitere ärztliche Behandlung notwendig machen. Nach einem groß angelegten Werbefeldzug für bessere Zahnpflege werden im folgenden Jahr nur 78 von 650 Schülern zum Besuch eines Zahnarztes aufgefordert.

a) Kann man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% annehmen, dass der Werbefeldzug erfolgreich war?

b) Wie viele Schüler dürften höchstens zum Besuch des Zahnarztes aufgefordert werden, um mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% annehmen zu können, dass der Werbefeldzug erfolgreich war?

③ $H_0: p = 0,15$; $H_1: p < 0,15$ Linkss.

a) Frage: Liegt 78 in A?

b) gesucht: Ablehnungsbereich; g r. Grenze

a) $P(X \leq g) = 0,01638 < 0,05 \Rightarrow$ Ja, ...

b) $A = [0; g]$ mit g größte Zahl mit $P(X \leq g) < 0,05$:

$A = [0; 82]$ Maximal 82 Schüler dürften...

Beispiel: Mensa

4. Bei einem kleinen Gymnasium in der Provinz konnte der Betreiber der Mensa bisher nur davon ausgehen, dass höchstens 36% der Oberstufenschüler regelmäßig die Mensa besuchen.
Inzwischen wurde der Speiseplan umgestellt und nach Meinung des Chefkochs attraktiver gestaltet, so dass der Betreiber der Mensa die Vermutung hat, dass sich der Anteil der Oberstufenschüler vergrößert hat.
An einem beliebigen Tag soll festgestellt werden, wie viele der 123 Oberstufenschüler die Mensa besuchen. Wenn mindestens 54 Oberstufenschüler an diesem Tag die Mensa besuchen, will der Betreiber der Mensa davon ausgehen, dass sich der Anteil der Oberstufenschüler vergrößert hat.
Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit?

5. Ein pharmazeutisches Unternehmen hat ein neues Medikament entwickelt, das angeblich in weniger als 10 % der Anwendungen schädliche Nebenwirkungen zeigt. Für einen statistischen Test wird das Medikament 150 Patienten verabreicht, von denen 8 Nebenwirkungen zeigen.
Kann man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% annehmen, dass der Anteil der Nebenwirkungen unter 10% liegt?

6. In einer Fabrik werden Speicherchips für Computer hergestellt. Erfahrungsgemäß ist jeder 5. Chip defekt. Nach einer Veränderung im Produktionsprozess hat der Hersteller die Vermutung, dass sich die Qualität verbessert hat.
Er will seine Vermutung durch eine Stichprobe mit 150 Chips untersuchen. Vor der Untersuchung will er aber festlegen, wie viele defekte Chips er höchstens finden darf, damit seine Vermutung mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% bestätigt ist. *(Er testet auf einem 5%- Signifikanzniveau.)*
Wie groß ist die Anzahl der defekten Chips, die er in der Stichprobe höchstens finden darf?

(4.) $H_0: p \le 0{,}36$ $\quad H_1: p > 0{,}36$ rechtss.

Frage: Berechne $P(X \ge 54)$

$= 1 - P(X \le 53) = 1 - 0{,}957 \Rightarrow \alpha = 4{,}3\%$

$\Rightarrow$ Mit 4,3% kann der Betreiber davon ausgehen, dass...

(5.) $H_0: p \ge 0{,}1$ $\quad H_1: p < 0{,}1$ linkss.

Frage: Berechne $P(X \le 8) = 0{,}03074 \approx 3{,}07\%$

$\Rightarrow$ Ja, die Irrtumswa. beträgt nur $3{,}07\% < 5\%$.

(6.) $H_0: p = 0{,}2$ $\quad H_1: p < 0{,}2$ linkss.; $n = 150$

Gesucht: Ablehnungsbereich, re. Grenze g

$\bar{A} = [0; g]$ mit g größte Zahl, so dass

$P(X \le g) < 0{,}05 \Rightarrow g = 21$,

$\bar{A} = [0; 21] \rightarrow$ Er darf max. 21 defekte Chips finden.

7. Bei Untersuchungen zum Leseverhalten von Schülern der 9. Klasse wurde vor einem Jahr festgestellt, dass nur etwa 30% der Schuler regelmäßig Zeitung lesen.
Inzwischen wurde von einigen Tageszeitungen Aktionswochen mit Probeabonnements durchgeführt, die mehr Schüler zum regelmäßigen Zeitungslesen bringen sollten.
Bei der neuesten Untersuchung zum Leseverhalten gaben 378 von 1200 Schülern an, regelmäßig Zeitung zu lesen.
Kann man mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% annehmen, dass die Aktionswochen erfolgreich waren?

(7.) $H_0: p = 0{,}3$ $\quad H_1: p > 0{,}3$ rechts.

gesucht: Ablehnungsbereich; g rechte Grenze. $g > 378$?

$P(X \leq 377) = 0{,}865 \Rightarrow$ kein Erfolg, $\alpha = 13{,}5$

für $\bar{A} = [g; 1200]$ mit g kleinste Zahl: $P(X \geq g) < 0{,}05 \Leftrightarrow P(X \leq g-1) > 0{,}95$

BEISPIEL 4: Wasserschmecker

Julia behauptet, Mineralwasser von Leitungswasser aufgrund des Geschmacks unterscheiden zu können. Um dies zu bestätigen, hat sie bei 15 Wasserproben einen Geschmackstest gemacht und dabei 10 Mal richtig entschieden.

Schwierigkeit: Trefferwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$

a) Mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit darf sich Julia als „Wasserschmecker" bezeichnen?

b) Wie oft hatte sie richtig entscheiden müssen, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit nur 2% betragen soll?

Bsp. 4: $H_0: p = \frac{1}{2}$ $\quad H_1: p > \frac{1}{2}$ re.

a) gesucht: $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9)$

$P(X \leq 9) = 0{,}849 \Rightarrow \alpha = 1 - 0{,}849 = 15{,}1\%$

Zu 15,1% irrt sie sich mit ihrer Behauptung.

b.) Annahmebereich mit $\alpha = 0{,}02$

gesucht: kleinstes b, so dass $P(X \leq b) > 0{,}98$

$\Rightarrow b = 11 \Rightarrow \bar{A} = [12; 15]$

Sie hätte 12 mal richtig entsch. müssen.

BEISPIEL 2: In einer Fabrik werden Speicherchips für Computer hergestellt.
Erfahrungsgemäß sind 20 % der Chips defekt.
Nach einer Veränderung im Produktionsprozess hat der Hersteller die Vermutung, dass weniger als 20% der Chips defekt sind.
Er untersucht seine Vermutung durch eine Stichprobe. Unter 200 Chips, die aus dem Produktionsprozess genommen werden, findet man nur 28 defekte.

Bsp. 2: $H_0: p = 0{,}2$ $\quad H_1: p < 0{,}2$ linkss. gesucht: $P(X \leq 28) = 0{,}0179$. Dies entspricht einer Irrtumswahrsch. von nur 1,8%, man kann die Nullhypothese verwerfen, die Prod.änderung war zieml. sicher erfolgreich.